EPREUVE DE MATHEMATIQUES Durée : 4 heures

Calculatrices autorisées (circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986)
B.O. n° 34 du 2 octobre 1986

Cette épreuve nécessite l'utilisation d'une feuille de papier millimétré

Soient a et b réels, on considère la fonction $f_{a,b}$ définie par

$f_{a,b}\begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow e^{ax} \sin bx \end{pmatrix}$, on note $C_{a,b}$ la courbe représentative de

$f_{a,b}$ dans un plan affine euclidien rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ centimètres et $\|\vec{j}\| = 20$ centimètres.

A) 1) Etudier les variations de $f_{a,b}$ suivant les valeurs de a et de b.

2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $C_{a,b}$ et de l'axe des abscisses.

3) Montrer qu'il existe k réel tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f_{a,b}(x)| \leqslant k\, e^{ax}$; soit F_a la fonction définie par $F_a\begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow e^{ax} \end{pmatrix}$ et Γ_a sa courbe représentative,

soit Γ'_a la courbe représentative de $-F_a$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection (si ils existent) de $C_{a,b}$ et de Γ_a ; que peut-on dire des tangentes à $C_{a,b}$ et à Γ_a en leurs points d'intersection ? ; mêmes questions pour $C_{a,b}$ et Γ'_a.

4) Préciser les variations de la restriction de $f_{1,1}$ à $[-2\pi, 0]$ et tracer les courbes représentatives des restrictions de $f_{1,1}$, F_1 et $-F_1$ à $[-2\pi, 0]$.

5) Montrer que $f_{a,b}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ que l'on calculera.

6) <u>On suppose $b \neq 0$</u>, déterminer $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \int_{\frac{-n\pi}{b}}^{-\frac{(n-1)\pi}{b}} f_{a,b}(t)\, dt$

Etudier la limite de $|u_n|$ et de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Etudier la convergence et l'absolue convergence de la série de terme général u_n ; dans les cas où elle converge (si ils existent), déterminer $\sum_{n\geqslant 1} u_n$; dans les cas où elle converge absolument (si ils existent), déterminer $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|$.

Tournez la page S.V.P.

B) On considère la fonction $g_{a,b}$ définie par $g_{a,b}\begin{pmatrix}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longrightarrow e^{ax}\cos bx\end{pmatrix}$ soit H un réel, et soit h_a la fonction HF_a, on note E l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels de $f_{a,b}$, $g_{a,b}$ et de h_a.

1) Montrer que E muni de la somme des applications et du produit par un scalaire est un espace vectoriel réel dont on déterminera la dimension.

2) On suppose $b \neq 0$, soit C un réel, soit φ l'application définie par

$$\varphi\begin{pmatrix}E\times E\longrightarrow\mathbb{R}\\ (f,g)\longrightarrow C\int_{\frac{-\pi}{b}}^{\frac{\pi}{b}} e^{-2ax} f(x)g(x)dx\end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs de C et de b telles que φ soit un produit scalaire défini sur E ; montrer qu'il existe une et une seule valeur positive H_o de H et une et une seule valeur C_o de C telles que $(f_{a,b}, g_{a,b}, h_a)$ soit une base orthonormale de E ; dans la suite, on donne à H cette valeur H_o, à C cette valeur C_o et on note B la base orthonormale obtenue.

3) Montrer que $\forall f \in E$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' \in E$; montrer que l'application $D\begin{pmatrix}E\longrightarrow E\\ f\longrightarrow f'\end{pmatrix}$ est un homomorphisme de E dont on déterminera la matrice M relativement à B ; déterminer le rang de M suivant les valeurs de a et de b ; dans les cas (si ils existent) où M est inversible, déterminer la matrice inverse M^{-1} et retrouver les primitives de $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$ puis déterminer les primitives de $g_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$.

4) On pose $D^1 = D$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $D^{n+1} = D^n \circ D$

On pose $z = a + ib$, on note $\rho = |z|$ et $\arg z = \theta\ (2\pi)$, déterminer la matrice de D^n en fonction de ρ , de θ et de n.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail